# 模块二 随机事件的概率、事件的独立性（★★☆）

## 强化训练

### 类型Ⅰ：古典概率与独立事件的判断

1．（2023·甘肃天水模拟·★★）从2，3，4，9中任取两个不同的数，分别记为$a$，$b$，则$\log_a b=2$的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）$\frac{2}{3}$

答案：B

解析：4个中取2个，样本点个数不多，直接罗列，

由题意，样本空间$\Omega=\{(2,3),(2,4),(2,9),(3,4),(3,9),(4,9),(3,2),(4,2),(9,2),(4,3),(9,3),(9,4)\}$，

其中满足$\log_a b=2$的样本点是$(2,4)$，$(3,9)$，故所求概率$P=\frac{2}{n(\Omega)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2．（2023·重庆一模·★★）某人有1990年北京亚运会吉祥物“盼盼”，2008年北京奥运会吉祥物“贝贝”、“晶晶”、“欢欢”、“迎迎”、“妮妮”，2010年广州亚运会吉祥物“阿祥”、“阿和”、“阿如”、“阿意”、“乐羊羊”，2022年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”，2022年杭州亚运会吉祥物“琮琮”、“莲莲”、“宸宸”，若他从这15个吉祥物中随机取出两个，这两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会的概率是（　　）

（A）$\frac{1}{10}$　（B）$\frac{1}{5}$　（C）$\frac{2}{5}$　（D）$\frac{2}{3}$

《一数•高考数学核心方法》

答案：B

解析：15个中取2个，样本点个数较多，故用排列组合方法计算，

记两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会为事件$A$，由题意，$n(\Omega)=C_{15}^2=105$，

这15个吉祥物中北京有7个，所以$n(A)=C_7^2=21$，故$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{21}{105}=\frac{1}{5}$.

3．（2023·上海模拟·★★）狂欢节期间，动漫社制作了各不相同的原神海报和方舟海报各5张组成一套，凡买一杯奶茶可以从这一套海报中随机抽取4张作为奖励，某原神粉丝参加抽奖，他从一套海报中抽到原神海报不少于两张的概率为_____.

答案：$\frac{31}{42}$

解析：样本点个数较多，罗列困难，故用排列组合的方法计算，下面先求$n(\Omega)$，

记抽到原神海报不少于两张为事件$A$，由题意，$n(\Omega)=C_{10}^4=210$，

再求$n(A)$，原神海报不少于两张，有恰好2张、恰好3张、恰好4张三种情况，故分别计算再相加，

所以$n(A)=C_5^2C_5^2+C_5^3C_5^1+C_5^4=155$，由古典概率公式，$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{155}{210}=\frac{31}{42}$.

4．（2023·四川绵阳二诊·★★★）寒假来临，秀秀将从《西游记》、《童年》、《巴黎圣母院》、《战争与和平》、《三国演义》、《水浒传》这六部著作中选四部（其中国外两部，国内两部），每周看一部，连续四周看完，则《三国演义》与《水浒传》被选中且在相邻两周看完的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{1}{6}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

**答案：**B

**解析：**样本点个数较多，罗列困难，故用排列组合方法计算，先求$n(\Omega)$，

记让求概率的事件为$A$，因为六部著作中国内国外各有三部，所以选出著作的方法有$\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^2$种，

选出书后，还要安排看书的顺序，有$\mathrm{A}_4^4$种排法，所以$n(\Omega)=\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_4^4=216$，

若《三国演义》与《水浒传》被选中，则只需再从三部外国著作选 2 部，有$\mathrm{C}_3^2$种选法，

选好后，再安排看的顺序，《三国演义》与《水浒传》要在相邻两周看完，用捆绑法，

将《三国演义》与《水浒传》捆绑，并与另外两部外国著作一起排序，有$\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3$种排法，

由分步乘法计数原理，$n(A)=\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3=36$，所以$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{36}{216}=\dfrac{1}{6}$.

5.（2023 • 四川成都模拟 • ★★）口袋中装有编号为①、②的 2 个红球和编号为①、②、③、④、⑤的 5 个黑球，小球除颜色、编号外，形状、大小完全相同. 现从中取出 1 个小球，记事件$A$为“取到的小球的编号为②”，事件$B$为“取到的小球是黑球”，则下列说法正确的是（　　）

（A）$A$与$B$互斥　　（B）$A$与$B$对立　　（C）$P(A\cap B)=\frac{6}{7}$　　（D）$P(A\cup B)=\frac{6}{7}$

**答案：**D

**解析：**样本点总数不多，可直接罗列来看，记 2 个红球分别为$r_1,r_2$，5 个黑球分别为$k_1,k_2,k_3,k_4,k_5$，

《一数•高考数学核心方法》

则样本空间$\Omega=\{r_1,r_2,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，$A=\{r_2,k_2\}$，$B=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，

所以$A\cap B=\{k_2\}\neq\varnothing$，从而$A$与$B$不互斥，也不对立，故 A 项、B 项错误；

再看 C、D 两项，涉及的概率为古典概型，故只需计算$A\cap B$和$A\cup B$包含的样本点个数即可，

因为$n(A\cap B)=1$，$n(\Omega)=7$，所以$P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{7}$，故 C 项错误；

又$A\cup B=\{r_2,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，所以$P(A\cup B)=\dfrac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{7}$，故 D 项正确.

6.（2023 •吉林模拟 •★★）掷一颗质地均匀的骰子，记随机事件$A_i=$“向上的点数为$i$”，其中$i=1,2,3,4,5,6$，$B=$“向上的点数为奇数”，则下列说法正确的是（　　）

（A）$\overline{A_1}$与$B$互斥　　（B）$A_2+B=\Omega$　　（C）$A_3$与$\overline{B}$相互独立　　（D）$A_4\cap B=\varnothing$

**答案：**D

**解析：**样本空间的样本点个数不多，可通过罗列来判断选项，由题意，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，

A 项，$A_1=\{1\}\Rightarrow\overline{A_1}=\{2,3,4,5,6\}$，又$B=\{1,3,5\}$，所以$\overline{A_1}\cap B=\{3,5\}\neq\varnothing$，从而$\overline{A_1}$与$B$不互斥，故 A 项错误；

B 项，$A_2=\{2\}$，所以$A_2+B=A_2\cup B=\{1,2,3,5\}\neq\Omega$，故 B 项错误；

C 项，$A_3=\{3\}$，$\overline{B}=\{2,4,6\}$，所以$P(A_3)=\dfrac{n(A_3)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{6}$，$P(\overline{B})=\dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$，

又 $A_3\cap\overline{B}=\varnothing$，所以 $P(A_3\cap\overline{B})=0\neq P(A_3)P(\overline{B})$，从而 $A_3$ 与 $\overline{B}$ 不独立，故 C 项错误；

D 项，$A_4=\{4\}$，所以 $A_4\cap B=\varnothing$，故 D 项正确.

7.（2023·全国模拟·★★★）一个质地均匀的正四面体木块的四个面上分别标有数字 1，2，3，4，连续抛掷这个正四面体木块两次，记录每次朝下的面上的数字，设事件 $A$ 为“两次记录的数字之和为奇数”，事件 $B$ 为“第一次记录的数字为奇数”，事件 $C$ 为“第二次记录的数字为偶数”，则下列结论正确的是（　　）

（A）事件 $B$ 与事件 $C$ 是对立事件　　（B）事件 $A$ 与事件 $B$ 不是相互独立事件

（C）$P(A)P(B)P(C)=\dfrac{1}{8}$　　（D）$P(ABC)=\dfrac{1}{8}$

**答案：** C

**解析：** 连续抛掷两次，每次都有 4 种结果，所以 $n(\Omega)=4\times4=16$，

样本空间中样本点个数较多，罗列较为繁琐，可直接分析 $A$，$B$，$C$，$A\cap B$ 等事件的样本点情况，

由题意，要使两次记录的数字之和为奇数，则必定为一次奇数一次偶数，可先把奇数数字、偶数数字选出来，再排序，所以 $n(A)=C_2^1C_2^1A_2^2=8$，类似的，$n(B)=C_2^1C_4^1=8$，$n(C)=C_4^1C_2^1=8$，

A 项，当第一次为奇数，第二次为偶数时，$B$，$C$ 同时发生，所以事件 $B$ 与 $C$ 不是对立事件，故 A 项错误；

B 项，若 $A\cap B$ 发生，则两次数字之和为奇数且第一次为奇数，于是第二次必定为偶数，

所以 $n(A\cap B)=C_2^1C_2^1=4$，故 $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，

又 $P(A)P(B)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{4}=P(A\cap B)$，所以事件 $A$ 与事件 $B$ 是相互独立事件，故 B 项错误；

C 项，$P(A)P(B)P(C)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{8}$，故 C 项正确；

D 项，事件 $A$，$B$，$C$ 同时发生，即第一次为奇数，第二次为偶数，所以 $n(ABC)=C_2^1C_2^1=4$，

从而 $P(ABC)=\dfrac{n(ABC)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，故 D 项错误.

### 类型Ⅱ：独立事件的概率计算

8.（★★）甲、乙两人独立地解同一问题，甲解决这个问题的概率是 $p_1$，乙解决这个问题的概率是 $p_2$，那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是（　　）

（A）$p_1p_2$　　（B）$p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$　　（C）$1-p_1p_2$　　（D）$1-(1-p_1)(1-p_2)$

**答案：** B

**解析：** 恰好 1 人解决这个问题有甲解决乙未解决，甲未解决乙解决两种情况，故分别考虑，

若甲解决乙未解决，概率为 $p_1(1-p_2)$；若乙解决甲未解决，概率为 $(1-p_1)p_2$；故所求概率为 $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$.

9.（2020·天津卷·★★）已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$，假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为_____；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为_____.

答案：$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{3}$

解析：设甲、乙落入盒子分别为事件 $A$，$B$，则两球都落入盒子的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

两球至少有一个落入盒子有 $A\overline{B}$，$\overline{A}B$，$AB$ 三种情况，其对立事件只有 $\overline{A}\overline{B}$ 一种情况，故用对立事件求概率，

甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为 $1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$.

10．（★★）甲、乙、丙、丁 4 个足球队参加比赛，假设每场比赛各队取胜的概率相等，现任意将这 4 个队分成两个组（每组两个队）进行比赛，胜者再赛，则甲、乙相遇的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{6}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）$\frac{1}{2}$

答案：D

解析：甲、乙相遇有两种情况：他们在同组相遇，他们不在同组但均胜出，故分别计算概率，

由题意，与甲同组的可能是乙、丙、丁中的任何一队，且概率相等，故甲、乙在同组的概率为 $\frac{1}{3}$；

若甲、乙不同组，则需要甲、乙都胜出，这种情况发生的概率为 $(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$；

综上所述，甲、乙相遇的概率为 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

《一数•高考数学核心方法》

11．（2023•江西模拟•★★★）若甲、乙、丙在 10 分钟之内独立复原魔方的概率分别为 0.7，0.6，0.5，则甲、乙、丙至多有一人在 10 分钟之内独立复原魔方的概率为（　　）

（A）0.26　（B）0.29　（C）0.32　（D）0.35

答案：D

解析："至多一人"可分"没有人"和"恰有一人"两种情况，可据此将目标事件拆分成互斥事件的并事件，

记甲、乙、丙能在 10 分钟之内独立复原魔方分别为事件 $A$，$B$，$C$，至多有一人在 10 分钟之内独立复原魔方为事件 $D$. 则 $A$，$B$，$C$ 相互独立，且 $D$ 有四种情况：三人均没能复原魔方，仅甲复原了魔方，仅乙复原了魔方，仅丙复原了魔方，用符号表示依次为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$A\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，

因为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$A\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$ 互斥，所以 $P(D)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$

$=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=(1-0.7)\times(1-0.6)\times(1-0.5)+0.7\times(1-0.6)\times(1-0.5)+(1-0.7)\times0.6\times(1-0.5)+(1-0.7)\times(1-0.6)\times0.5=0.35$.

12．（2023•江苏模拟•★★★）甲、乙两队进行篮球比赛，采取五场三胜制（先胜三场者获胜，比赛结束），根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为"客客主主客"，设甲队主场取胜的概率为 0.5，客场取胜的概率为 0.4，且各场比赛相互独立，则甲队在 0:1 落后的情况下，最终获胜的概率为（　　）

（A）0.24　（B）0.25　（C）0.2　（D）0.3

答案：A

解析：设甲队第二、三、四、五场获胜分别为事件 $A_2$，$A_3$，$A_4$，$A_5$，甲队最终获胜为事件 $A$，

要求甲队最终获胜的概率，应先从各局比赛胜负情况考虑，分析有哪些获胜的方式，

甲队获胜的方式有四种：$A_2A_3A_4$，$A_2A_3\overline{A}_4A_5$，$A_2\overline{A}_3A_4A_5$，$\overline{A}_2A_3A_4A_5$，

四种情况彼此互斥，可用加法公式求概率，下面先分别计算概率，计算时需注意主客场的切换，

$P(A_2A_3A_4)=P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0.4\times0.5\times0.5=0.1$，

$P(A_2A_3\overline{A}_4A_5)=P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)P(A_5)=0.4\times0.5\times(1-0.5)\times0.4=0.04$，

$P(A_2\overline{A}_3A_4A_5)=P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)P(A_5)=0.4\times(1-0.5)\times0.5\times0.4=0.04$，

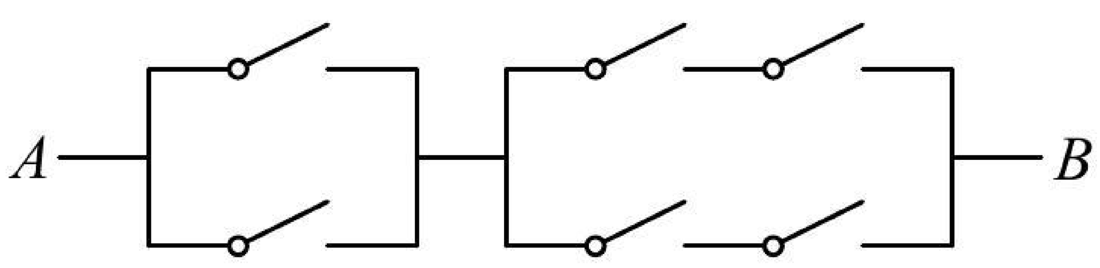
$P(\overline{A}_2A_3A_4A_5)=P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)=(1-0.4)\times0.5\times0.5\times0.4=0.06$，

所以$P(A)=P((A_2A_3A_4)\cup(A_2A_3\overline{A}_4A_5)\cup(A_2\overline{A}_3A_4A_5)\cup(\overline{A}_2A_3A_4A_5))$

$=P(A_2A_3A_4)+P(A_2A_3\overline{A}_4A_5)+P(A_2\overline{A}_3A_4A_5)+P(\overline{A}_2A_3A_4A_5)=0.1+0.04+0.04+0.06=0.24$.

13．（2022•广东佛山模拟•★★★）如图，电路从 $A$ 到 $B$ 上共连接了 6 个开关，每个开关闭合的概率都为$\dfrac{2}{3}$，若每个开关是否闭合相互之间没有影响，则从 $A$ 到 $B$ 通路的概率是（　　）

（A）$\dfrac{10}{27}$　（B）$\dfrac{100}{243}$　（C）$\dfrac{448}{729}$　（D）$\dfrac{40}{81}$




**答案：**C

**解析：**如图，把电路分两部分，先看 $A$ 到 $C$，两开关应至少闭合 1 个，情况较多，考虑用对立事件求概率，

《一数•高考数学核心方法》

设从 $A$ 到 $C$ 通路的概率是 $p_1$，则 $p_1=1-(1-\dfrac{2}{3})\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{8}{9}$，

再看从 $C$ 到 $B$，又分完全相同的上、下两部分，要使从 $C$ 到 $B$ 通路，上、下应至少有一条是通路，仍用对立事件求概率，先计算上、下各自通路的概率，

设从 $C$ 到 $B$ 上、下各自通路的概率为 $p_2$，则 $p_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，所以从 $C$ 到 $B$ 通路的概率为 $1-(1-\dfrac{4}{9})\times(1-\dfrac{4}{9})=\dfrac{56}{81}$，

而从 $A$ 到 $B$ 要通路，需 $A$ 到 $C$，$C$ 到 $B$ 均通路，故所求概率 $P=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{56}{81}=\dfrac{448}{729}$.